

Contrôle continu de mathématiques

24.01.2018

Intégrales et EDO

Résoudre les exercices suivants en justifiant au maximum les étapes de calcul. Chaque exercice vaut 1pt. Il y a deux exercices bonus à la fin de l'examen valant également 1 pt chacun. Vous avez le droit à tout matériel ne contenant pas un microprocesseur et n'ayant pas d'accès à internet.

Exercice 1 (1pt)

Calculer la primitive suivante

$$\int (t + 9)^{-12} dt \quad (1)$$

Exercice 2 (1pt)

Répondre aux questions suivantes.

1. Soit $\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}/2$, que vaut

$$\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2} dx? \quad (2)$$

2. Vrai ou faux: Une intégrale représentant une aire sous une fonction, elle est forcément positive.
3. Que vaut $\int_\pi^\pi e^{-x^2} dx$?
4. Vrai ou faux: Soit $\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}/2$, alors

$$\int_0^\infty e^{-x^2} \cdot e^{-x^2} dx = \int_0^\infty e^{-x^2} dx \cdot \int_0^\infty e^{-x^2} dx = \pi? \quad (3)$$

Exercice 3 (1pt)

Calculer l'intégrale suivante

$$\int_0^1 (x^5 - 2x^2 + 2x - 1)(5x^4 - 4x + 2)dx \quad (4)$$

Exercice 4 (1pt)

Calculer la primitive suivante

$$\int x \cdot e^{-x} dx. \quad (5)$$

Exercice 5 (1pt)

Résoudre l'EDO suivante

$$y'(x) = (x^5 - 2x^2 + 2x - 1)(5x^4 - 4x + 2), \quad \text{où } y(0) = 0. \quad (6)$$

Exercice 6 (1pt)

Résoudre l'EDO suivante

$$x^5 - y(x) \cdot y'(x) = 0. \quad (7)$$

Exercice 7 (1pt)

Résoudre l'EDO suivante

$$y'(x) - 16 \cdot x^3 \cdot y(x) = 16 \cdot x^3 \quad (8)$$

Exercice 8 (1pt)

Résoudre l'EDO suivante

$$8 \cdot y'(x) = 6 + 3 \cdot y(x), \quad y(0) = 0. \quad (9)$$

Exercice Bonus 1 (1pt)

Calculer l'intégrale suivante

$$\int_{-1}^1 e^{-x^2} \sin(x) dx \quad (10)$$

Exercice Bonus 2 (1pt)

Résoudre l'EDO suivante (R , C , ω et U sont des constantes)

$$u'_c(t) + \frac{u_c(t)}{R \cdot C} = \frac{U \sin(\omega t)}{R \cdot C}. \quad (11)$$